Bogolyubov Kyiv Conference
Problems of Theoretical and Mathematical Physics
Bogolyubov Institute for Theoretical Physics

Cubic-quintic interplay in the nonlinear Klein–Gordon model

Взаємний вплив терцового і квінтового тонів у нелінійній моделі Клейна — Ґордона

Ганджа І.С., Седлецький Ю.В.

Інститут фізики НАН України
Відділ теоретичної фізики
Київ, Україна

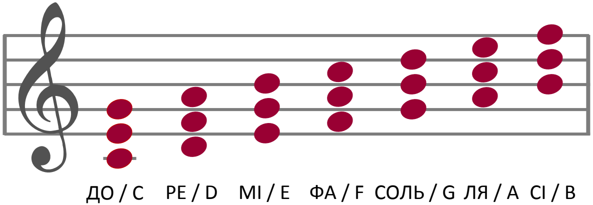
24 вересня 2024 р.

Нелінійна модель Клейна — Ґордона

$$\boldsymbol{\phi_{tt} - c^2\phi_{xx} + f(\phi) = 0}, \quad f(\phi) = \frac{\partial V}{\partial \phi} \tag{1}$$

$$\boldsymbol{f(\phi) = \alpha_1\,\phi + \alpha_3\,\phi^3 + \alpha_5\,\phi^5} \tag{2}$$

$$V = \tfrac{1}{2}\,\alpha_1\,\phi^2 + \tfrac{1}{4}\,\alpha_3\,\phi^4 + \tfrac{1}{6}\,\alpha_5\,\phi^6$$



Тризвук: прима — терція — квінта

основний тон — терцовий тон — квінтовий тон

Нелінійна модель Клейна — Ґордона

$$\boldsymbol{\phi_{tt} - c^2\phi_{xx} + f(\phi) = 0}, \quad f(\phi) = \frac{\partial V}{\partial \phi}$$

Приклади:

1) Релятивістичне лінійне хвильове рівняння для скалярних полів ($\alpha_3 = \alpha_5 = 0$, основний тон):

$$\boldsymbol{\phi_{tt} - c^2\phi_{xx} + \alpha_1\,\phi = 0}, \quad \alpha_1 = \frac{m^2 c^4}{\hbar^2}$$

Дисперсійне співвідношення: $\omega^2 = c^2\,k^2 + \alpha_1$

Фазова швидкість: $v_p = \frac{\omega}{k} = \pm\, c\sqrt{1 + \frac{\alpha_1}{c^2 k^2}} = \pm\frac{\sqrt{m^2 c^4 + c^2 p^2}}{p} = \frac{E}{p}, \quad p = \hbar\, k$

Нелінійна модель Клейна — Ґордона

2) Модель ϕ^4 ($\alpha_5 = 0$, терцовий тон)

- модель теорії поля для безспінових частинок
- феноменологічний опис фазових переходів у системах з параметром порядку
- топологічні збудження в зігнутих графенових нанострічках

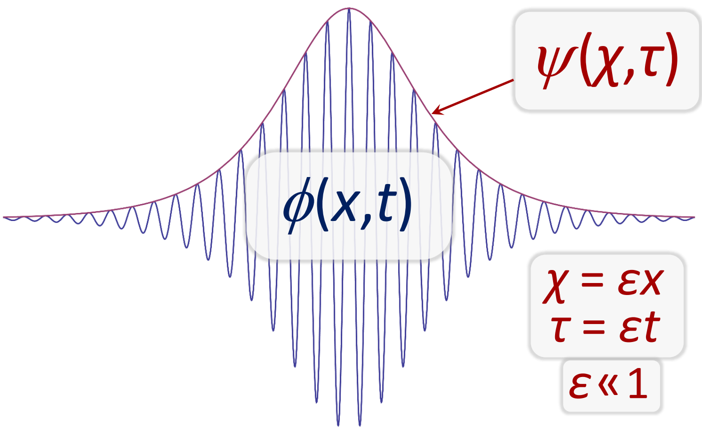
3) Модель ϕ^6 ($\alpha_5 \neq 0$, квінтовий тон)

- вищий порядок теорії поля для безспінових частинок
- вищий порядок теорії фазових переходів у системах з параметром порядку

4) Модель синус-Ґордона: $f(\phi) = a \sin \phi \approx \alpha_1\, \phi + \alpha_3\, \phi^3 + \alpha_5\, \phi^5$

- динаміка дислокацій у кристалах
- поширення імпульсів магнітного поля (флаксонів) у джозефсонівських переходах
- спінові хвилі в рідкому гелії
- явище самоіндукованої прозорості в нелінійній оптиці

Наближення повільної модуляції



Узагальнене нелінійне рівняння Шредінґера

$$\phi = \phi_0 + \phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \dots$$

$$\phi_1 = \tfrac{1}{2}\psi(\chi,\tau)\exp(\mathrm{i}(kx-\omega t)) + \mathrm{c.c.}, \quad \omega(k) = \sqrt{c^2k^2+\alpha_1}$$

$$\phi_n = \tfrac{1}{2}\psi_n(\chi,\tau)\exp(\mathrm{i}n(kx-\omega t)) + \mathrm{c.c.}$$

$$\mathrm{i}\psi_t = -\mathrm{i}\omega_k\,\psi_x - \left(\tfrac{1}{2}\omega_{kk}\,\psi_{xx} + q^{(3)}|\psi|^2\psi\right) \tag{3}$$

$$-\mathrm{i}\left(-\tfrac{1}{6}\omega_{kkk}\,\psi_{xxx} + q_1^{(4)}|\psi|^2\psi_x + q_2^{(4)}\psi^2\overline{\psi}_x\right)$$

$$-\left(-\tfrac{1}{24}\omega_{kkkk}\,\psi_{xxxx} + q_1^{(5)}|\psi|^4\psi + q_2^{(5)}|\psi|^2\psi_{xx} + q_3^{(5)}\psi^2\overline{\psi}_{xx} + q_4^{(5)}\psi\,|\psi_x|^2 + q_5^{(5)}\overline{\psi}\psi_x^2\right)$$

$$+\dots$$

Lukomsky V. P., Gandzha I. S. *Ukr. J. Phys.* **54**, 207–215 (2009)
Sedletsky Yu. V., Gandzha I. S. *Nonlin. Dyn.* **94**, 1921–1932 (2018)
Gandzha I. S., Sedletsky Yu. V. *Nonlin. Dyn.* **98**, 359–374 (2019)

Гамільтонове представлення

$$\boldsymbol{\Psi} = \sqrt{\frac{\omega}{2}}\left(\psi - \frac{\mathrm{i}v_g}{2\omega}\psi_x + \dots\right), \quad v_g = \frac{\partial\omega}{\partial k} = \frac{c^2 k}{\omega} = \frac{c^2}{v_p} \tag{4}$$

Гамільтонова (зчеплена або симплектична) змінна:

$$z = \Psi \exp(\mathrm{i}(kx - \omega t)) \tag{5}$$

Рівняння Гамільтона:

$$\mathrm{i}z_t = \frac{\delta\mathcal{H}}{\delta\bar{z}}, \quad \mathcal{H} = \int \langle H\rangle\, dx \tag{6}$$

Густина гамільтоніану:

$$H = \tfrac{1}{2}p^2 + \tfrac{1}{2}c^2\phi_x^2 + V, \quad p = \phi_t$$

$$p_t = -\frac{\delta H}{\delta\phi} = -\frac{\partial H}{\partial\phi} + \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial H}{\partial\phi_x}, \quad \phi_t = \frac{\partial H}{\partial p}$$

Операторне представлення частоти

$$H_2 = \tfrac{1}{2}\left(\varphi_t^2 + \boldsymbol{c^2\varphi_x^2 + \alpha_1\varphi^2}\right), \quad \varphi \equiv \phi_1$$

$$\omega^2(k) = \boldsymbol{c^2k^2 + \alpha_1}$$

$$H_2 = \tfrac{1}{2}\left(\varphi_t^2 + (\widehat{\omega}\varphi)^2\right)$$

$$\boldsymbol{\widehat{\omega} = \omega(-\mathrm{i}\partial_x) = \sqrt{c^2(|-\mathrm{i}\partial_x|\boxdot)^2 + \alpha_1(\boxdot)^2}} \tag{7}$$

Зчеплена (симплектична) комплексна координата

$$H_2 = \tfrac{1}{2}\left(\mathrm{i}\varphi_t + \widehat{\omega}\,\varphi\right)\left(-\mathrm{i}\varphi_t + \widehat{\omega}\,\varphi\right) = \sqrt{\widehat{\omega}}z\,\sqrt{\widehat{\omega}}\overline{z} \tag{8}$$

$$\boldsymbol{z = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\widehat{\omega}}\,\varphi + \mathrm{i}\frac{1}{\sqrt{\widehat{\omega}}}\,\varphi_t\right)}, \quad \varphi = \frac{1}{\sqrt{2\widehat{\omega}}}(z + \overline{z}) \tag{9}$$

Craig W., Guyenne P., Sulem C. *Wave Motion* **47**, 552–563 (2010)

Sedletsky Yu. V., Gandzha I. S. *Phys. Rev. E* **102**, 022202 (2020)

Гамільтонова форма узагальненого НРШ

$$T = \sqrt{\alpha_1}\, t, \quad X = \frac{\sqrt{\alpha_1}}{c}\, x$$

$$\mathrm{i}\Psi_T = -\mathrm{i}\beta_1\Psi_X - \left(\beta_2\Psi_{XX} + \mathcal{Q}^{(3)}|\Psi|^2\Psi\right) - \mathrm{i}\left(-\beta_3\Psi_{XXX} + \mathcal{Q}^{(4)}|\Psi|^2\Psi_X\right) \qquad (10)$$

$$+\beta_4\Psi_{XXXX} - \mathcal{Q}_1^{(5)}|\Psi|^4\Psi - \mathcal{Q}_2^{(5)}|\Psi|^2\Psi_{XX} - \mathcal{Q}_3^{(5)}\Psi^2\overline{\Psi}_{XX} - \mathcal{Q}_4^{(5)}\Psi|\Psi_X|^2 - \mathcal{Q}_5^{(5)}\overline{\Psi}\Psi_X^2$$

$$\mathcal{Q}_5^{(5)} - \mathcal{Q}_2^{(5)} + \mathcal{Q}_3^{(5)} = 0$$

$$\beta_n = \frac{1}{n!}\frac{\partial^n\tilde{\omega}}{\partial\kappa^n}, \quad \tilde{\omega} = \frac{\omega_0}{\sqrt{\alpha_1}} = \sqrt{\kappa^2+1}, \quad \kappa = \frac{ck_0}{\sqrt{\alpha_1}}$$

Sedletsky Yu. V., Gandzha I. S. *Phys. Rev. E* **106**, 064212 (2022)
Sedletsky Yu. V., Gandzha I. S. *Proc. R. Soc. A* **479**, 20230315 (2023)

Коефіцієнти рівняння

$$\boldsymbol{f(\phi) = \alpha_1\,\phi + \alpha_3\,\phi^3 + \alpha_5\,\phi^5}, \qquad V = \tfrac{1}{2}\,\alpha_1\,\phi^2 + \tfrac{1}{4}\,\alpha_3\,\phi^4 + \tfrac{1}{6}\,\alpha_5\,\phi^6$$

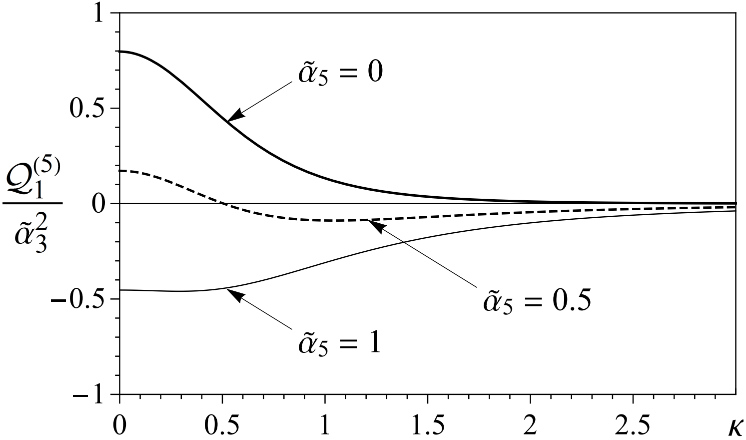
$$\mathcal{Q}^{(3)} = -\frac{3\,\tilde{\alpha}_3}{4\,\tilde{\omega}^2}, \qquad \mathcal{Q}^{(4)} = \frac{2\kappa}{\tilde{\omega}^2}\,\mathcal{Q}^{(3)}$$

$$\boldsymbol{\mathcal{Q}_1^{(5)} = \frac{51 - 80\,\tilde{\omega}^2\tilde{\alpha}_5 - 3\kappa^2}{64\,\tilde{\omega}^5}\,\tilde{\alpha}_3^2}$$

$$\mathcal{Q}_2^{(5)} = \frac{1-2\kappa^2}{\tilde{\omega}^4}\,\mathcal{Q}^{(3)}, \qquad \mathcal{Q}_3^{(5)} = \tfrac{1}{2}\,\mathcal{Q}_4^{(5)} = \frac{1-\kappa^2}{2\,\tilde{\omega}^4}\,\mathcal{Q}^{(3)}, \qquad \mathcal{Q}_5^{(5)} = \frac{1-3\kappa^2}{2\,\tilde{\omega}^4}\,\mathcal{Q}^{(3)}$$

$$\tilde{\alpha}_3 = \frac{\alpha_3}{\sqrt{\alpha_1^3}}, \qquad \boldsymbol{\tilde{\alpha}_5 = \frac{\alpha_5\alpha_1}{\alpha_3^2}}$$

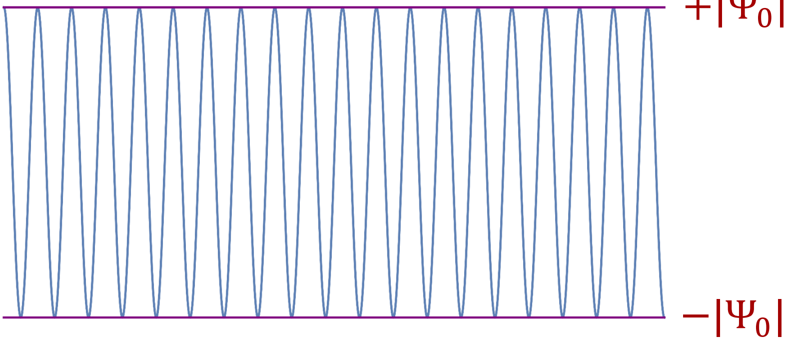
Вплив квінтового тону



Розв'язок сталої амплітуди

Однорідний розв'язок сталої амплітуди (плоска хвиля):

$$\boldsymbol{\Psi(T) = \Psi_0 \exp\left(\mathrm{i}\mu\,|\Psi_0|^2 T\right)}, \quad \mu = \mathcal{Q}^{(3)} + \mathcal{Q}_1^{(5)}|\Psi_0|^2 \tag{11}$$



Модуляційна нестійкість

Мале довгохвильове (модуляційне) збурення:

$$\Psi(X,T) = \big(\Psi_0 + \epsilon(X,T)\big)\exp\big(\mathrm{i}\mu\,|\Psi_0|^2\,T\big) \tag{12}$$

$$\epsilon(X,T) = \epsilon_0^+ \exp\left(\mathrm{i}\varkappa X - \mathrm{i}\,\Omega\,T\right) + \epsilon_0^- \exp\left(\mathrm{i}\,\overline{\Omega}\,T - \mathrm{i}\varkappa X\right)$$

Дисперсійне співвідношення для збурення:

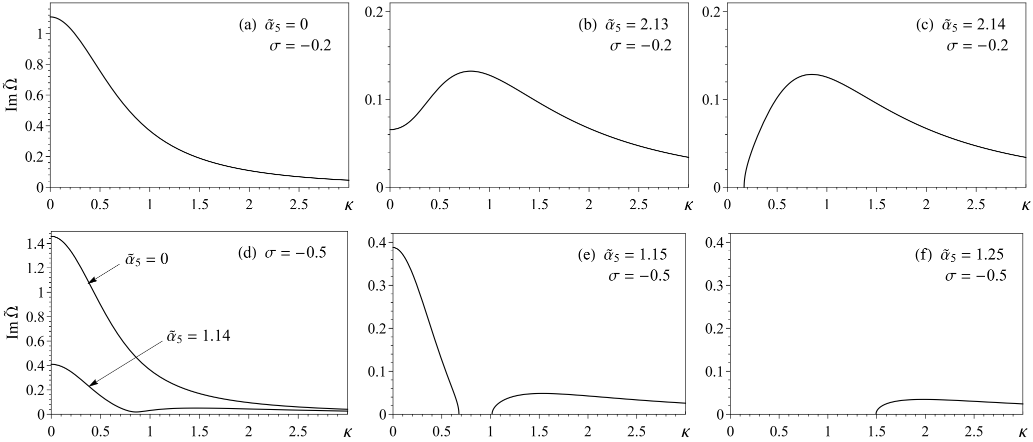
$$\boldsymbol{\Omega} = \left(\beta_1 + \mathcal{Q}^{(4)}|\Psi_0|^2\right)\varkappa + \beta_3\varkappa^3 + \beta_4\varkappa^4|\varkappa|\sqrt{\boldsymbol{S}} \tag{13}$$

$$S|_{\varkappa\to 0} = \frac{\sigma}{128\,\tilde{\omega}^{11}}\left[(80\,\tilde{\omega}^2\tilde{\alpha}_5 + 3\kappa^2 - 51)\,\sigma + 24\,\tilde{\omega}^3\right]\left[(3\kappa^2 - 1)\,3\sigma + 4\,\tilde{\omega}^3\right]$$

$$\sigma = \tilde{\alpha}_3\,|\Psi_0|^2$$

Модуляційна нестійкість $\mathrm{Im}\,\Omega > 0$

$$\mathrm{Im}\,\Omega = |\varkappa||\sigma|^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{Im}\,\tilde{\Omega}, \quad \tilde{\Omega} = \sqrt{|\sigma|^{-1}S}, \quad \sigma = \tilde{\alpha}_3\,|\Psi_0|^2$$



Перспективи практичного застосування

Аналіз хвильових явищ у нелінійних середовищах, які характеризуються значною нелінійністю 5-го порядку

Приклад: діелектрична нелінійність сегнетоелектриків з **фазовим переходом першого роду*** (наприклад, кристали $BaTiO_3$, $T_c \approx 120^\circ C$)

Розвинення густини вільної енергії за поляризацією (в межах феноменологічної теорії Ландау):

$$F = \frac{1}{2}\alpha_1 P^2 + \frac{1}{4}\boldsymbol{\alpha_3 P^4} + \frac{1}{6}\boldsymbol{\alpha_5 P^6} + \dots$$

$$\boldsymbol{\alpha_3 < 0}, \quad \boldsymbol{\alpha_5 > 0} \quad (T < T_c)$$

*залежність поляризації від температури має розрив у критичній точці T_c

Wang Y.L. et al. Landau thermodynamic potential for $BaTiO_3$, J. Appl. Phys. 101, 104115 (2007)
Morozovska A.N. et al. Flexosensitive polarization vortices in thin ferroelectric films, Phys. Rev. B 104, 085420 (2021)

Висновки

1. Нелінійне рівняння Шредінґера 5-го порядку для нелінійної моделі Клейна — Ґордона вперше отримано в гамільтонівській формі, яка не порушує умову збереження енергії при русі обвідної хвильового пакету.

2. Вперше показано, що зміна балансу між нелінійностями 3-го і 5-го порядків у цій моделі суттєво впливає на стійкість немодульованих хвильових пакетів відносно довгохвильових модуляцій.

3. Отримані результати демонструють, що вищі хвильові порядки теорії поля при певних умовах можуть мати вирішальне значення для аналізу фізичних явищ у нелінійних моделях.

Цю роботу зроблено під час війни, що триває в Україні.
Ми завдячуємо всім, хто в складі ЗСУ, як волонтери або прості громадяни боролися і продовжують боротися за свободу і незалежність нашої нації та країни.

Дякую за увагу!